令和元年 11 月

事務所便り 第 113 号

～有理数と無理数はどちらが多い？～

有理数とは、分母分子が共に整数の分数で表すことができる数である。任意の整数 n は $\frac{n}{1}$ と書けるので有理数に含まれる。勿論、自然数も有理数に含まる。我々が日常的に取り扱う数やそれらの四則演算によって導き出される数は、ほとんどすべて有理数といえるだろう。有理数全体の集合は、太字“**Q**”で表される。

一方、無理数とは、実数の中で有理数でないものすべてである。$\sqrt{2}$（＝1.4142…） や π（＝3.1415…；円周率）、e（＝2.7182…；ネイピアの数）は、その代表であるといえるだろう。無理数は、循環しない無限小数と換言することもできる。無理数全体の集合は、太字“**I**”で表される。実数全体の集合は、太字“**R**”で表され、**Q**∪**I**＝**R** （∪；集合の和）であり、かつ **Q**∩**I**＝φ（∩；共通部分、φ；空集合）である。

さて、これら二つの集合、どちらの方が数が多いのだろうか。実は、有理数も無理数も、どちらも無限に存在する。しかも、$0 \leqq x \leqq 1$ のごく限られた範囲内においてさえ無限に存在するのである。共に無限であるものに対して多い少ないというのは、比較のしようがない。そこで、集合の「濃度」という概念を導入して比較する。

ある 2 つの無限集合の間において、1 対 1 の対応関係（全単射）を構成することができれば、それらの集合の濃度が等しいと定義する。例えば、自然数全体の集合 **N** と整数全体の集合 **Z** の間には、$f(n) = \frac{n-1}{2}\ (n;奇数),\ \ -\frac{n}{2}\ (n;偶数)$ と定義すれば、1 対 1 対応が構成できるため、**N** と **Z** の濃度は等しい。自然数の濃度は、無限集合の濃度としては最小であり、それを $\aleph_0$（アレフゼロ）と表す。また、1 つ 2 つ…と数えられるという意味で、可算集合ともいう。

他方、自然数や整数とは異なり、有理数は、ある限定された区間でさえも無限に存在している。例えば、$0 \leqq x \leqq 1/2$ の間には、1/3，1/4，…，1/100，…といった具合である。実は、少々不思議に思われるかもしれないが、有理数全体の集合 **Q** の濃度も、自然数や整数と同じ $\aleph_0$ であり可算集合なのである（証明省略）。すなわち、自然数全体の集合 **N** との間に 1 対 1 の対応関係を構成することができるのである。

ところが、有理数と無理数によって構成される実数全体の集合 **R** は、可算集合ではない（カントールの対角線論法により証明可；記述省略）。すなわち、自然数全体の集合 **N** と 1 対 1 の対応を構成することができない。実数全体の集合 **R** の濃度は $\aleph_1$（アレフワン）で表され、$\aleph_0$ よりも大きい濃度である。もし無理数全体の集合 **I** が可算集合であると仮定したならば、有理数全体の集合 **Q** との和集合である実数全体の集合 **R** は、可算集合であることになり、それに矛盾する。したがって、無理数全体の集合 **I** は可算集合ではなく、その濃度は実数と同じ $\aleph_1$ であるといえるのである。

という訳で、少々冗漫な記述になってしまったことを反省しつつ、その結論は、意外にも、我々が日常的に使用している有理数よりも無理数の方が数が多いといえるのである。しかも、圧倒的に。

BE ENTERPRISING

株式会社 東昭エンタープライズ
土地家屋調査士 今江信之 事務所
〒160-0004 東京都新宿区四谷 4-33 ニシダ第一ビル 3 階
TEL.03(3357)6572　FAX.03(3357) 6573
http://www.t-enterprise.co.jp